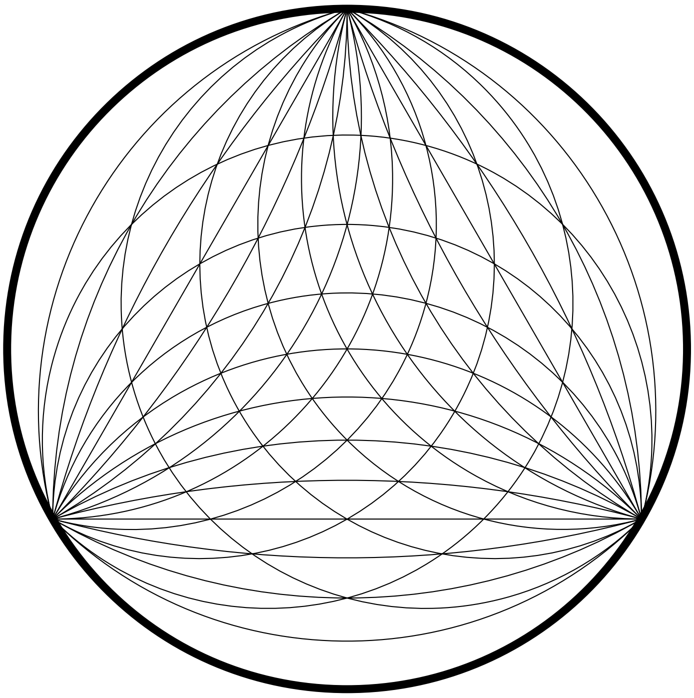
Íslenska stærðfræðafélagið
Félag raungreinakennara í framhaldsskólum

Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2022–2023

Svör og lausnir

Neðra stig



Fyrsti hluti

1. Bóndi á hænur og kýr. Hann á 22 dýr samtals sem hafa 62 fætur. Hvað eru hænurnar margar?

☐ 10 ☐ 11 ☒ 13 ☐ 17

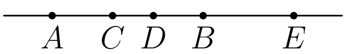
Skýring. Látum h vera fjölda hæna og k fjölda kúa. Þar sem fjöldi dýra er 22 þá er $h + k = 22$. Nú hafa hænur tvo fætur og kýr fjóra. Dýrin hafa samtals 62 fætur svo $h \cdot 2 + k \cdot 4 = 62$. Af jöfnunni $h + k = 22$ fæst að $h \cdot 4 + k \cdot 4 = 88$. Drögum $h \cdot 2 + k \cdot 4 = 62$ frá jöfnunni $h \cdot 4 + k \cdot 4 = 88$ og fáum $h \cdot 2 = 26$. Því fæst að $h = 13$ og bóndin á 13 hænur.

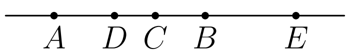
2. Setjum sem svo að A, B, C, D og E séu punktar á línu þannig að B sé á milli C og E, C sé á milli A og E og D sé á milli A og B. Hvað eftirfarandi getur **ekki** gilt:

☐ C er á milli A og B ☐ B er á milli A og E
☐ C er á milli A og D ☒ D er á milli B og E

Skýring. Þar sem B er á milli C og E og C er á milli A og E þá er B á milli A og E og C er á milli A og B. Þar sem B er á milli D og E þá er D ekki á milli B og E.

Ef við röðunum punktunum A, B, C, D og E á línuna þannig að C sé á milli A og D, D sé á milli C og B og B sé á milli D og E þá er B á milli C og E, C á milli A og E og D á milli A og B. Það getur því gerst að C sé á milli A og B.





3. Ef $a + b + c = 3$, $a + b = 1$ og $a + c = 4$, hvað er þá a?

☐ -2 ☐ -1 ☐ 1 ☒ 2

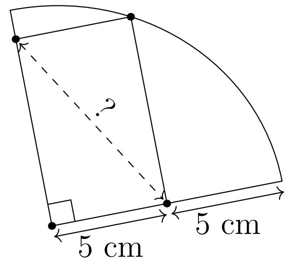
Skýring. Við fáum að $a = (a + b) + (a + c) - (a + b + c) = 1 + 4 - 3 = 2$.

4. Tilraunarglas inniheldur eina bakteríu. Eftir tvær mínútur skiptir bakterían sér í tvær nákvæmlega eins bakteríur. Eftir tvær mínútur í viðbót skipta þessar tvær bakteríur sér aftur, svo þær eru þá orðnar fjórar. Svona heldur þetta áfram og eftir nákvæmlega klukkustund er tilraunaglasið orðið fullt. Hvað hefði það tekið langan tíma ef glasið hefði byrjað með fjórar slíkar bakteríur?

☐ 30 mínútur ☒ 56 mínútur ☐ 58 mínútur ☐ 60 mínútur

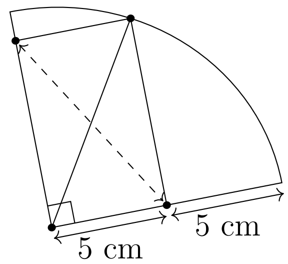
Skýring. Eftir fjórar mínútur eru fjórar bakteríur í glasinu. Þar sem það tekur 60 mínútur fyrir eina bakteríu að skipta sér þannig að hún fylli glasið þá tekur það hana 56 mínútur eftir að hún hefur skipt sér í fernt, að fylla tilraunaglasið. Því tekur það 56 mínútur fyrir fjórar bakteríur að fylla glasið.

5. Í hringgeiranum til hægri er dregið strik frá öðrum armi hringgeirans að hinum sem skiptir honum í tvo 5 cm búta. Hægt er að draga rétthyrning með strikið sem hornalínu þannig að sá hornpunktur rétthyrningsins, sem er gagnstæður miðpunkti hringsins, liggi á hringnum. Hvað er strikið langt?



☐ 5 cm ☐ 2π cm ☐ 3π cm ☒ 10 cm

Skýring. Nú eru hornalínur rétthyrnings jafnlangar. Hin hornalína ferhyrnings er geisli hringgeirans. Strikið neðst hefur lengd 5 cm + 5 cm = 10 cm og er líka geisli hringgeirans. Því fæst að lengd striksins sem spurt er um er 10 cm.

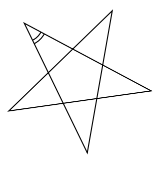


6. Fótbolti er samsettur úr 12 fimmhyrningum og 20 sexhyrningum. Hver hornpunktur liggur að nákvæmlega þremur marghyrningum. Hvað eru margir hornpunktar á fótbolta?

☐ 30 ☒ 60 ☐ 90 ☐ 180

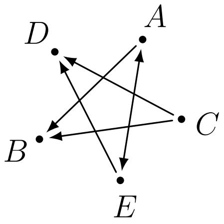
Skýring. Samanlagður fjöldi horna marghyrninganna er $12 \cdot 5 + 20 \cdot 6 = 180$. Þar sem hvert horn fótboltans liggur að nákvæmlega þremur marghyrningum þá er þrefaldur fjöldi hornpunkta fótboltans einnig samanlagður fjöldi horna marghyrningsins. Fjöldi hornpunkta er því 60.

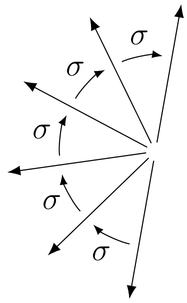
7. Hve stór eru hornin í fimmhyrndri reglulegri stjörnu?



☒ 36° ☐ 45° ☐ 48° ☐ 54°

Skýring. Látum A, B, C, D og E vera hornpunkta stjörnunnar þannig að hliðar stjörnunar séu strikin AB, BC, CD, DE og EA. Látum σ vera stærð snúningsins sem snýr strikinu AE um A yfir í strikið AB. Hann er jafnstór snúningnum sem snýr strikinu AB um B yfir í strikið CB því stjarnan er regluleg. Ef við snúum örinni $\overrightarrow{AE}$, frá A til E um horn af stærð σ með miðjur A, B, C, D og E í þessari röð þá fáum við örvarnar $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{ED}$ og að lokum $\overrightarrow{EA}$, það er örina $\overrightarrow{AE}$ snúið um hálfan snúning. Þar sem örvarnar $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$ og $\overrightarrow{ED}$ liggja allar sömu hliðar örvarinnar $\overrightarrow{AE}$ þá ályktum við að fimmfaldur snúningur σ sé snúningur um $180°$. Því er $\sigma = 36°$, það er horn stjörnunnar eru $36°$ af stærð.





8. Snigill vill skríða upp úr 2,5 m holu. Hann skríður frá morgni til kvölds, og í lok dags hefur hann skriðið upp um 60 cm. Hins vegar rennur hann aftur niður um 20 cm yfir nóttina meðan hann sefur. Þannig heldur snigillinn áfram þar til hann kemst upp úr holunni. Á hvaða degi kemst snigillinn upp úr holunni.

☐ fimmta degi ☒ sjötta degi ☐ sjöunda degi ☐ áttunda degi

Skýring. Í lok fyrsta dags er snigillinn í 60 cm hæð. Hann sígur um 20 cm um nóttina og byjar því annan daginni 40 cm hæð og endar í 100 cm hæð í lok dagins. Í lok þriðja dags endar snigillinn í 140 cm hæð, í lok fjórða dags í 180 cm hæð, í lok fimmta dag í 220 cm hæð. Snigillinn byrjar því sjötta daginni í 200 cm hæð og kemst því upp úr holunni í 250 cm hæð á þeim degi.

9. Gerum ráð fyrir að a, b, c og d séu ólíkar jákvæðar rauntölur þannig að $2a + c + d < a + b + c < b + d$. Hver talnanna a, b, c og d er **næst** stærst?

☐ a ☐ b ☐ c ☒ d

Skýring. Þar sem $2a+c+d < a+b+c$ þá er $a+d < b$. Þar sem a og d eru jákvæðar þá er $a < b$ og $d < b$. Þar sem $a + b + c < b + d$ þá er $a + c < d$. Þar sem a og c eru jákvæðar þá er $a < d$ og $c < d$. Því er d stærri en bæði a og c en d er minni en b. Því er d er næst stærst.

10. Stærðin $\sqrt{89 + 12\sqrt{55}}$ er jöfn:

☐ $\sqrt{5} + 4\sqrt{11}$ ☐ $2\sqrt{5} + 3\sqrt{11}$ ☒ $3\sqrt{5} + 2\sqrt{11}$ ☐ $4\sqrt{5} + \sqrt{11}$

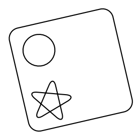
Skýring. Nú eru $\sqrt{89+12\sqrt{55}}$, $\sqrt{5}+4\sqrt{11}$, $2\sqrt{5}+3\sqrt{11}$, $3\sqrt{5}+2\sqrt{11}$ og $4\sqrt{5}+\sqrt{11}$ jákvæðar. Ef við hefjum í annað veldi fæst:

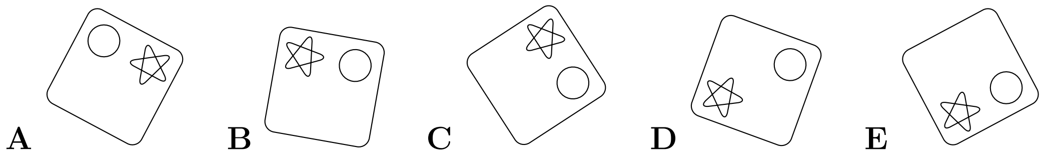
$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{89+12\sqrt{55}}\right)^2 &= 89+12\sqrt{55}\\
\left(\sqrt{5}+4\sqrt{11}\right)^2 &= 181+8\sqrt{55}\\
\left(2\sqrt{5}+3\sqrt{11}\right)^2 &= 119+12\sqrt{55}\\
\left(3\sqrt{5}+2\sqrt{11}\right)^2 &= 89+12\sqrt{55}\\
\left(4\sqrt{5}+\sqrt{11}\right)^2 &= 91+8\sqrt{55}
\end{aligned}$$

Við ályktum að $\sqrt{89+12\sqrt{55}} = 3\sqrt{5}+2\sqrt{11}$.

Annar hluti

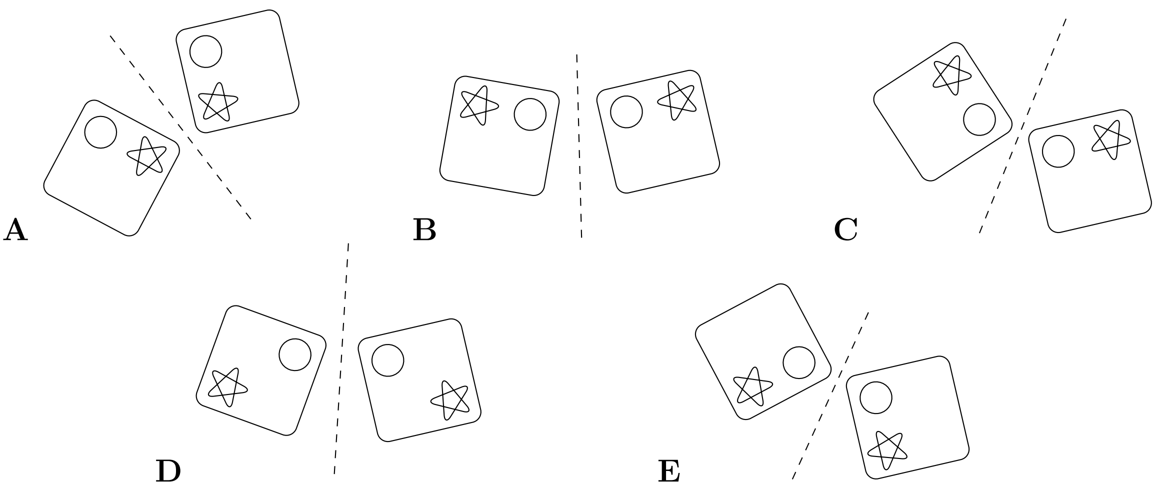
11. Hver eftirfarandi mynda er **spegilmynd** myndarinnar til hægri?





☒ **A** ☐ **B** ☐ **C** ☐ **D** ☐ **E**

Skýring. Speglum myndunum þannig að hringurinn falli á sama stað og hringurinn í upphaflegu myndinni.



Við sjáum að stjarna er aðeins rétt á mynd **A**.

12. Jörmunrekur er að bera fram drykki á hringlaga bakka með geisla af lengd 3. Hvað getur hann komið fyrir mörgum sívalningslaga glösum með geisla af lengd 1 á bakkann, án þess að stafla þeim? Glösin mega snertast en mega ekki skara út fyrir bakkann.

☐ 3 ☐ 5 ☒ 7 ☐ 9 ☐ 11

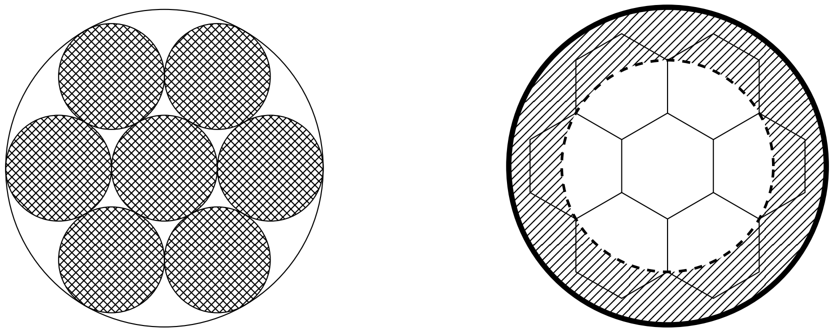
Skýring. Við getum raðað 7 glösum á bakkann með því að setja eitt glasið í miðjuna og raða hinum sex umhverfis það.

Skoðum miðjur glasanna. Þar sem lengd geisla glasanna er 1 getur engin miðja glasanna verið næri jaðir bakkans en 1. Því liggja allar miðjurnar innan hrinskífu með sömu miðju og bakkinn og geisla af lengd 2.

Þar sem lengd geisla glasanna er 1 þá er fjarlægð milli miðja tveggja glasa að minnsta kosti 2. Reglulegur sexhyrningur með hliðarlend 1 hefur þvermál 2 svo fjarlægð tveggja punkta innan þannig sexhyrnings er í mesta lagi 2. Tvær miðjur glasa geta því ekki legið innan sama reglulega sexhyrningsins með hliðarlengd 1 (nema ef þeir eru gangstæðir hornpunktar sexhyrningsins).

Teiknum slíkan reglulegan sexhyrning á miðju bakkans og röðum svo sex eins sexhyrningum umhverfis hans. Allir punktar innan hrinsskífunnar með geisla af lengd 2 liggja innan í að minnsta kosti einum sexhyrninganna.

Ef miðpunktur liggur á hornpunkti þá getum við snúið bakkanum undir glösunum þannig að enginn miðpunktanna sé hornpunktur sexhyrninganna. Við getum því gert ráð fyrir að engin miðja glasanna sé hornpunktar sexhyrninganna. Því getur í mesta lagi ein miðja legið innan hvers sexhyrnings og geta glösin því ekki verið fleiri en 7.



13. Gerum ráð fyrir að n sé jákvæð heiltala þannig að n gangi upp í $1+2+\cdots+n$. Hvað getum við sagt um n?

☐ n er slétt ☒ n er oddatala ☐ n er frumtala ☐ $n = 1$ ☐ $n < 2022$

Skýring. Sé n oddatala þá getum við lagt 1 við $n-1$, 2 við $n-2$, ..., $\frac{n-1}{2}$ við $\frac{n+1}{2}$ og fengið n í öll skiptin. Því gengur n upp í $1+2+\cdots+(n-1)$ og þar með gengur n einnig upp í $1+2+\cdots+n$.

Sé n slétt þá getum við lagt 1 við $n-1$, 2 við $n-2$, ..., $\frac{n}{2}-1$ við $\frac{n}{2}+1$ og fengið n í öll skiptin. Eftir stendur $\frac{n}{2}$ svo afgangurinn úr deilingu $1+2+\cdots+(n-1)$ er $\frac{n}{2}$.

Því fæst að afgangurinn úr deilingu $1+2+\cdots+n$ með n er $\frac{n}{2}$. Því fæst að n gengur ekki upp í $1+2+\cdots+n$ er n er slétt.

Til dæmis gæti n verið jöfn $2025 = 45^2$, sem er ekki slétt, ekki frumtala, ekki 1 og ekki minni en 2022.

14. Á borði liggja 7 evrumyntir. Framan á stendur hversu margar evrur myntin er og aftan á er myntin merkt einhverju landi evrópusambandsins. Hvað þarf að snúa við mörgum myntum til að vera viss um að allar einnar evru myntir á borðinu séu merktar DE?

2€ DE DE 1€ FR 1€ DE

☐ 1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5

Skýring. Við þurfum að athuga hvort myntir sem sýna 1€ hafi örugglega DE á hinni hliðinni og við þurfum að athuga myntirnar sem hafa tákn annars lands en DE séu hafi örugglega ekki 1€ á hinni hliðinni. Við þurfum því að snúa við tveimur 1€ mynntum og einni FR mynnt, samtals þremur mynntum.

15. Tölurnar $1, 2, \ldots, 2022$ eru skrifaðar á spjöld og þeim raðað í stærðarröð í línu, spjaldið 1 fremst. Fyrsta spjaldið er tekið og fært aftast. Næst eru fremstu tvö spjöldin tekin og færð aftast, án þess að breyta röð þeirra. Svona gengur þetta koll af kolli, þar til í síðasta skrefinu eru fyrstu 2021 spjöldin tekin og færð aftast. Hvert er númer fremsta spjaldsins í lokin?

☐ 1 ☐ 1011 ☒ 1012 ☐ 2021 ☐ 2022

Skýring. Við getum hugsað að spjöldunum sé raðað í hring með 2022 spjöldum. Setjum stein á spjaldið með tölunni 1, og færum hann í hverri umferð á það spjald sem er efst í bunkanum. Eftir fyrstu umferð er steinninn á spjaldi númer 2, eftir aðra umferð á spjaldi 4, og svo framvegis. Þannig fer steinninn fram um i sæti í i-tu umferð. Það eru 2021 umferð svo steinninn fer fram um $1+2+\cdots+2021$ sæti. Þar sem það eru 2022 steinar í hringnum þá endar steinninn á sama stað þegar hann hefur ferðast 2022 sæti. Nú er $1+2+\cdots+2021 = (1+2021)+(2+2020)+\cdots+(1010+1012)+1011 = \overbrace{2022+2022+\cdots+2022}^{1010-\text{liðir}} + 1011$. Svo steinninn ferðast 1010 hringi og 1011-sæti í viðbót. Því endar steinninn á spjaldi númer $1+1011 = 1012$.

Þriðji hluti

16. Hver er næsta fjögurra stafa tala á eftir 2022 þar sem aðeins tveir ólíkir tölustafir koma fyrir?

Svar. 2111

Skýring. Nú er talan stærri en 2022 svo ef talan væri minni en 2100 þá væri 2 í þúsundasætinu og 0 í hundraðasætinu svo tölustafirnir sem þyrftu að vera í tuga og einingasætinu þyrftu að vera 0 eða 2. Þær fjórar tölur eru 2000, 2002, 2020 og 2022 en engin þeirra er stærri en 2022. Því er talan að minnsta kosti 2100.

Ef talan er minni en 2200 þá er 2 í þúsundasætinu og 1 í hundraðasætinu svo tölustafirnir sem þyrftu að vera í tuga og einingarsætinu þurfa að vera 1 eða 2. Þær tölur eru 2111, 2112, 2121 og 2122. Talan 2111 er þeirra minnst. Þar sem $2111 > 2022$ þá er 2111 sú tala sem við erum að leita að.

17. Hvaða heiltölur a og b uppfylla $12^{2a+b} \cdot 18^{a+2b} = 36^3 \cdot 2^{3a+2b} \cdot 3^{a+6b-1}$?

Svar. $(a, b) = (2, 1)$.

Skýring. Fáum að vinstri hliðin er

$$12^{2a+b} \cdot 18^{a+2b} = (2^2 \cdot 3)^{2a+b} \cdot (2 \cdot 3^2)^{a+2b} = 2^{2(2a+b)+(a+2b)} \cdot 3^{(2a+b)+2(a+2b)} = 2^{5a+4b} \cdot 3^{4a+5b}$$

og því $36^3 = (2^2 \cdot 3^2)^3 = 2^{2\cdot 3} \cdot 3^{2\cdot 3} = 2^6 \cdot 3^6$ fæst að hægri hliðin er

$$36^3 \cdot 2^{3a+2b} \cdot 3^{a+6b-1} = 2^{6+(3a+2b)} \cdot 3^{6+(a+6b-1)} = 2^{3a+2b+6} \cdot 3^{a+6b+5}$$

Þar sem frumþáttun ræðra talna er ótvíræð þá eru veldisvísar fyrir hvorn frumþátt þeir sömu í hægri og vinstri hlið. Því fæst

$$\begin{cases} 5a + 4b &= 3a + 2b + 6 \\ 4a + 5b &= a + 6b + 5 \end{cases} \quad \text{sem jafngildir} \quad \begin{cases} 2a + 2b &= 6 \\ 3a - b &= 5 \end{cases}$$

Með því að leggja hálfa fyrri jöfnuna við seinni jöfnuna fæst $3a - b + \frac{1}{2}(2a + 2b) = 5 + \frac{6}{2}$, þ.e. $4a = 8$ svo $a = 2$. Af seinni jöfnunni fæst að $b = 3a - 5 = 3 \cdot 2 - 5 = 1$. Því er $(a, b) = (2, 1)$.

18. Elvar á 9 kubba sem númeraðir eru $1, 2, \ldots, 9$. Hann langar að nota alla kubbana til að byggja þrjá turna úr 2, 3 og 4 kubbum þannig að númerin á kubbunum í hverjum turn lækki upp á við. Hvað getur hann byggt turnana á marga vegu?

Svar. 1260

Skýring. Nú er $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ fjöldi leiða til að raða tölunum $1, 2, \ldots, n-1, n$ í röð. Látum m vera fjölda leiða sem Elvar getur raðað tölunum á turnana eins og lýst er í dæminu. Athugum að $m \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4!$ er fjöldi leiða til að raða tölunum 9 með einhverjum hætti á turnana sem er aftur jafn $9!$ þ.e. $m \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4! = 9!$ sem gefur

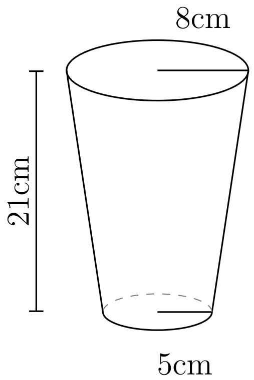
$$m = \frac{9!}{2! \cdot 3! \cdot 4!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 6} = 9 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 5 = 63 \cdot 20 = 1260.$$

19. Finnið þriggja stafa frumtölu þannig að margfeldi tölustafa hennar sé 112.

Svar. 827

Skýring. Frumþáttun tölunnar 112 er $112 = 2^4 \cdot 7$. Því geta tölustafir umbeðinnar frumtölu eingöngu verið 1, 2, 4, 7, 8. Einn tölustafanna þarf að vera 7 og því hinir 2 og 8 eða 4 og 4. Athugum að 7 verður að vera aftast því annars er talan deilanleg með tveimur og því ekki frumtala. Því koma 287, 447 og 827 einar til greina. Af þessum tölum er 827 eina frumtalan ($287 = 7 \cdot 41$ og $447 = 3 \cdot 149$).

20. Atli er að fá sér bragðaref og er því að velta fyrir sér hvað kemst mikið í ílátið fyrir stóran bragðaref. Botninn á ílátinu er hringskífa með geisla 5cm og opið efst er hringskífa með geisla 8cm. Ílátið er 21cm á hæð og geislinn minnkar línulega frá toppi til botns. Hvert er rúmmál ílátsins í rúmsentimetrum?



Svar. $903\pi\text{cm}^3$.

Skýring. Formið fæst með því að skera þvert í gegnum keilu með hæð af lengd h og grunnflöt með geisla af lengd 8cm í 21cm hæð frá grunnfleti. Nú gildir að $h/8 = (h - 21\text{cm})/5$ sem gefur $h = 56\text{cm}$. Rúmmál innan í keilu sem hefur hæð h og grunnflöt með geisla r er $R = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, það er þriðjungur marfeldisfeldis grunnflatar og hæðar. Því fæst að rúmmál formsins er

$$\frac{1}{3}\pi((8\text{cm})^2 \cdot 56\text{cm} - (5\text{cm})^2 \cdot (56\text{cm} - 21\text{cm})) = 903\pi\text{cm}^3.$$

Fjórði hluti

21. Gutti er að leggja saman jákvæðar heiltölur a og b í vasareikni en gleymir að stimpla inn síðasta tölustaf a, sem er 3, og fær út 222. Ef hann hefði gleymt að stimpla inn síðasta tölustaf b í stað síðasta tölustafs a hefði útkoman verið 500. Hverjar eru tölurnar a og b?

Lausn 1. Látum x vera töluna sem fæst með því að sleppa síðasta tölustaf a og y vera töluna sem fæst með því að sleppa síðasta tölustaf b. Þá er $a = 10x + 3$ og $b = 10y + d$ fyrir eitthvað $0 \leq d \leq 9$. Þá fáum við jöfnunar:

$$x + 10y + d = 222 \quad \text{og} \quad 10x + 3 + y = 500.$$

Ljóst er að a og b eru í mesta lagi þriggja stafa tölur sem gerir x og y að í mesta lagi tveggja stafa tölum. Af seinni jöfnunni má sjá að seinni tölustafur y er 7 og þar að auki að fyrri tölustafur x getur bara verið verið 3 eða 4. Enn fremmur sést af fyrri jöfnunni að fyrri tölustafur y getur bara verið $0, 1$ eða 2 en 2 kemur ekki til greina af því $x \geq 30$. Ef fyrri tölustafur y er 0 gildir

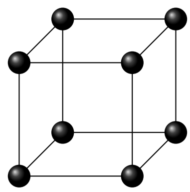
$$222 = x + 10y + d \leq x + 79$$

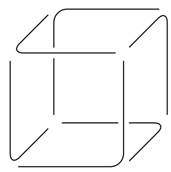
sem getur ekki gengið því x er í mesta lagi tveggja stafa tala. Þar með er ljóst að $y = 17$. Seinni jafnan gefur þá $x = 48$ og þegar x og y eru þekkt gefur fyrri jafnan $d = 4$. Þar með er eina lausnin $a = 483$ og $b = 174$ og þá eru jöfnurnar uppfylltar því $174 + 48 = 222$ og $17 + 483 = 500$.

Lausn 2. Látum x og y vera eins og í fyrri lausninni. Dæmið gefur okkur einnig að $x + 10y + d = 222$ og $10x + 3 + y = 500$. Með því að margfalda seinni jöfnuna með 10 og draga þá fyrri frá henni fæst að $99x + 30 - d = 4778$.

Tökum afganga beggja hliðanna þegar deilt er með 9 og fáum að d hafi afganginn 4 þegar deilt er með 9. Þar sem $0 \leq d \leq 9$ fæst að $d = 4$. Þá höfum við tvær ójöfnur í tveimur óþekktum stærðum og getum leyst beint. Jöfnurnar eru $x + 10y = 218$ og $10x + y = 497$, svo $99y = 2180 - 497 = 1683$, sem gefur loks $y = 17$. Þar með má stinga inn fyrir y og fá $x = 48$. Þar með fæst lausnin $a = 483$, $b = 174$.

22. Marteinn ætlar að búa til tening eins og á mynd úr nokkrum bútum af vír sem hann beygir og kennaratyggjói. Hann vill hafa teninginn þannig að ekki sé meira en einn vír á hverri brún teningsins. Hver er minnsti fjöldi vírbúta sem hann getur framkvæmt þetta með? *Til hægri er sýnt hvernig Marteinn gæti smíðað teninginn með* 6 *vírbútum.*





Lausn. Í hverjum hornpunkti mætast þrjár hliðar. Þar geta annaðhvort mæst þrír endar á vírum, eða einn vírendi ásamt öðrum vír sem liggur meðfram horninu. Það eru 8 hornpunktar á teningnum, svo það eru að minnsta kosti 8 endar á vírum. Hver vír hefur tvo enda, svo vírarnir eru að minnsta kosti 4. Ein margra leiða sem Marteinn getur smíðað teninginn úr fjórum vírum er sýnd á mynd.